

ПОЛВЕКА КАК ОДИН ДЕНЬ¹

А.Г. Витушкин

Цифровая система записи звука

В 1933 году намечали созвать Всесоюзный съезд по вопросам реконструкции связи и развития слаботочной промышленности. Владимир Александрович Котельников подготовил доклад «О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи». Съезд не состоялся, но труды были опубликованы.

Основной тезис доклада Котельникова состоял в том, что *количество информации, получаемой по каналу связи, пропорционально ширине полосы пропускаемых частот*. Более строгая формулировка этого утверждения называется теперь в учебниках теоремой Котельникова: целая функция типа σ , суммируемая с квадратом на вещественной оси, представима в виде

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k) q_k(t), \text{ где } t_k = \frac{k\pi}{\sigma} \text{ и } q_k(t) = \frac{\sin(\sigma(t - t_k))}{\sigma(t - t_k)}.$$

Действительно, из формулы видно, что «количество информации», т.е. количество независимых чисел, которое дает сигнал со спектром σ за единицу времени, равно $\frac{\sigma}{\pi}$.

Такие формулы были известны до Котельникова. Его находка — удачный выбор класса функций и понимание возможности приложений. Впервые содержательно обсуждался информационный аспект проблем связи. Его идея стала основой современной теории информации. Результаты Котельникова отмечены многими наградами, среди которых медаль Ломоносова (АН СССР, 1981 г.) и медаль Белла (США, 2000 г.). Доклад Котельникова затрагивал вечную проблему радиосвязи. Если канал связи имеет узкую полосу пропускаемых частот, то принимаемый сигнал неразборчив из-за отсутствия высоких частот. Если используется широкая полоса, то возрастает шум от разного рода помех. Кроме того, всегда была проблема экономии места в эфире. Были попытки обойти эти трудности за счет какого-либо преобразования передаваемого сигнала. Котельников сумел объяснить, что эти попытки не имеют перспективы, оставив тем самым бесполезную деятельность изобретателей информационного «вечного двигателя».

Тезис Котельникова можно уточнить, используя оценки энтропии соответствующего класса функций. А.Н. Колмогоров и В.М. Тихомиров показали (1959 г.), что ϵ -энтропия (в равномерной метрике) компакта функций, получаемых ограничением на отрезок $[-T, T]$ целых функций типа σ , вещественных и ограниченных по модулю единицей на вещественной оси, асимптотически равна (при малых значениях ϵ и больших значениях T) величине $\frac{2T}{\pi} \log_2 \frac{1}{\epsilon}$. Получается так, что если всякая функция указанного класса, передаваемая по данному каналу связи, может быть восстановлена на выходе

¹ Фрагмент статьи, опубликованной в сборнике «Математические события XX века». Издательство Фазис, Московское Математическое Общество, 2000. С. 10–11.

канала с точностью ϵ , то количество информации, т.е. число двоичных знаков, которое может быть передано по этому каналу связи за единицу времени,

асимптотически равно $\frac{\sigma}{\pi} \log_2 \frac{1}{\epsilon}$.

Формулу Котельникова в полной мере оценили в конце 70-х, когда появилась возможность заменить аналоговую систему записи сигналов цифровой. В частности, в звукозаписи стоимость нужной для этого цифровой аппаратуры стала приемлемой, а качество воспроизведения, получаемое с компакт-дисков, оказалось почти идеальным.